

Exercices préliminaires

Exercice 1: Lois de Morgan

Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Pour $X \subset E$, on note X^c le complémentaire de X dans E . Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
2. $(A^c)^c = A$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Exercice 2: Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Démontrer que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. A-t-on égalité en général ?

Exercice 3: Ensembles d'images réciproques

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$. Soient également A et B deux parties de F .

1. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 4: Suites d'ensembles — liminf et limsup

Etant donné une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles, on définit la limite supérieure et la limite inférieure de la suite (A_n) par :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

1. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble Ω . Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$C_n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ est pair,} \\ B & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cap B$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n = A \cup B$.

2. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
 - (a) $A_n =]-\infty, n]$;

- (b) $A_n =] -\infty, -n]$;
- (c) $A_{2n} = A, A_{2n+1} = B$;
- (d) $A_n =] -\infty, (-1)^n]$.

3. Écrire les définitions de $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ avec les quantificateurs \forall et \exists .