Rappels de probabilités

Calcul Stochastique, M1 IM-MFA

Note : *Les questions marqués d'un* $(*)$ *peuvent se montrer plus difficiles et ne sont pas prioritaires.*

1 Mesure et Intégration

1. Soit $A_1, \ldots, A_n$ une partition de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in I} A_i : I \subset \{1, \ldots, n\}\}$ est une tribu. ($\mathcal{A}$ est constituée de toutes les réunions possibles d'ensembles A_i.)
2. Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère T la tribu engendrée par les ensembles $S_n = \{n, n+1, n+2\}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Quels sont les éléments de la tribu T ?
3. Soient X un ensemble et $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ une application. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par $\mu(A) = \sum_{x \in A} h(x)$ est une mesure.
4. Soit (X, T) un espace mesuré, et soit $f : (X, T) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable. Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie sur E par

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < a, \\ a & \text{si } f(x) \geq a, \\ -a & \text{si } f(x) \leq -a. \end{cases}$$

   Démontrer que f_a est mesurable.
5. $(\star)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est mesurable. Est-ce que f est mesurable ?
6. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout $a > 0$, $\mu(\{x \in E : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu$.
7. Déterminer les limites lorsque $n \to \infty$ des intégrales suivantes :

$$A. \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \ \mathrm{d}t \qquad B. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/n}}{1+x^2} \ \mathrm{d}x \quad C. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + x^4} \ \mathrm{d}x \qquad D. \int_0^{\sqrt[n]{n}} \sqrt{1+x^n} \ \mathrm{d}x$$

8. Soit $F : y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2} \, dx$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer F' sur cet intervalle.

2 Espaces L^p, Espaces produits

1. Soient $f, g \in L^3(\mathbb{R})$. Démontrer que $f^2 g$ est intégrable.
2. Soient a, b deux réels avec $a < b$ et soit $f \in L^\infty([a, b])$. Démontrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

3. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$. (*Indication : on établira dans un premier temps la convexité de* $s \mapsto 1/(1+e^s)$)
4. Caluler $I = \int_{(0,1]^2} \frac{\min(x,y)}{\max(x,y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.
5. Calculer $J = \int_D (x+y) e^{-(x+y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ where $D = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2, x+y \leq 1\}$

3 Calculs de lois

1. Soit X une variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soit U une variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) Montrer que $\sigma U + m$ a même loi que X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
   (c) Calculer la densité de la loi de $Y = aX + b$ pour a et b réels.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
2. Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi de densité $(x, y) \mapsto \frac{3}{4} \exp(-|x + 2y| - |x - y|)$. Calculer la densité de la loi de $(X + 2Y, X - Y)$, puis les densités des lois de X et Y. (*Indication : On pourra utiliser un changement de variable approprié.*)
3. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $\frac{1}{Y}$ a même loi que Y.
4. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
5. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, de même loi $U([0; 1])$ (uniforme sur $[0, 1]$). Calculer la fonction de répartition de $\inf(U, V)$.
6.